



Universidade Federal  
de São João del-Rei

Isabela da Silva Lima

**TESTE DE HIPÓTESES CONVENCIONAL E  
SEQUENCIAL SOBRE O PARÂMETRO DA  
DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL**

São João del-Rei  
Dezembro de 2019

Isabela da Silva Lima

# TESTE DE HIPÓTESES CONVENCIONAL E SEQUENCIAL SOBRE O PARÂMETRO DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Carla Regina Guimarães Brighenti.

São João del-Rei, 05 de Dezembro de 2019.

Banca Examinadora

---

Orientadora: Prof. Dra. Carla Regina Guimarães Brighenti

---

Prof. Dra. Andréa Cristiane dos Santos Delfino

---

Prof. Dr. Peter de Matos Campos

São João del-Rei  
Dezembro de 2019

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela força diária e por estar sempre presente em minha vida me guiando e me livrando de todos os perigos.

Aos meus pais, Adriana e Mérito, pelo amor incondicional e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações. Sou eternamente grata por todo o apoio.

Aos meus avós, Rosa e Altamiro, e aos avós do céu, Terezinha e José, por toda sabedoria transmitida.

A todos familiares que acreditaram em mim, em especial, à minha prima, Lívia, que sempre esteve ao meu lado.

Ao meu namorado, Gabriel, pelo companheirismo, apoio e por entender minha ausência em alguns momentos durante essa etapa final do curso.

À minha orientadora, professora Dra. Carla Brighenti, pela orientação, dedicação e confiança depositada em mim. Sou grata por ter sido mais do que minha orientadora, pela contribuição para o meu crescimento pessoal e profissional.

Agradeço também a todos professores que fizeram parte dessa trajetória, pelos ensinamentos durante esses quatro anos.

Aos professores Dra. Andréa Cristiane dos Santos Delfino e Dr. Peter de Matos Campos que aceitaram o convite de fazer parte da banca examinadora.

Aos meus amigos de turma, presentes que a Matemática me proporcionou, por todos os momentos compartilhados e pela ajuda mútua durante esses anos.

Aos meus amigos de Entre Rios, pelo carinho e torcida durante toda essa caminhada.

# Resumo

Os testes de hipóteses são regras de decisão sobre os parâmetros de uma distribuição baseadas em informações contidas nas amostras. Os problemas mais usuais de decisões sobre estes parâmetros são da distribuição Normal. Neste trabalho, são apresentados os conceitos que estruturam um Teste de Hipóteses, uma das abordagens básicas da Inferência Estatística, de modo particular, foi estudada a teoria matemática para o Teste de Hipóteses Convencional sobre o parâmetro da distribuição Exponencial. Além disso, foi trabalhado o Teste Sequencial da Razão de Probabilidade, no qual o tamanho amostral é considerado uma variável aleatória. Foi realizado um estudo da teoria geral e posteriormente uma abordagem para a distribuição Exponencial. Elaborou-se um script para as metodologias dos testes de hipóteses Convencional e Sequencial utilizando o software R. A teoria estudada foi exemplificada para um problema de controle de qualidade. O Teste de Hipóteses Sequencial resultou na mesma decisão que o Convencional, entretanto, com um tamanho de amostra menor, se mostrando mais vantajoso.

***Palavras chave:*** *Inferência Estatística, Amostragem Sequencial, SPRT*

# Abstract

Hypothesis Tests are decision rules about the parameters of a distribution based on information contained in the samples. The most common decision problems about these parameters are the Normal distribution. This paper, are presented the concepts that structure a Hypothesis Test, one of the basic approaches of Statistical Inference, in particular, the mathematical theory for the Conventional Hypothesis Test on the Exponential distribution parameter was studied. Besides that, the Sequential Probability Ratio Test was developed, in which the sample size is considered a random variable. A study of general theory was carried out and then an approach to Exponential distribution. A script for the Conventional and Sequential hypothesis testing methodologies was developed using the R software. The theory studied was exemplified for a quality control problem. The Sequential Hypothesis Test resulted in the same decision as the Conventional, however, with a smaller sample size, exhibiting to be more advantageous.

***Keywords:*** *Statistical Inference, Sequential Sampling, SPRT*

# Lista de Figuras

3.1	Funções densidade de probabilidade da distribuição exponencial. . . . .	17
3.2	Funções densidade de probabilidade da distribuição gama. . . . .	18
4.1	Funções densidade de probabilidade para $X \sim \text{Exp}(1/100)$ e $X \sim \text{Exp}(1/200)$ 26	
4.2	Gráficos exibindo as áreas correspondentes às probabilidades de erros tipo I e tipo II para o caso $n=20$ . . . . .	28
4.3	Teste sequencial da razão de verossimilhanças da distribuição exponencial;	32
4.4	Teste sequencial do logaritmo da razão de verossimilhanças da distribuição exponencial. . . . .	33
4.5	Teste sequencial da razão de verossimilhanças da distribuição exponencial pelo pacote SPRT. . . . .	35
4.6	Teste sequencial do logaritmo da razão de verossimilhanças da distribuição exponencial pelo pacote SPRT. . . . .	36

# Lista de Tabelas

1.1	Tipos de erro cometidos em testes de hipótese. . . . .	10
4.1	Valores para os diferentes tamanhos de amostras. . . . .	31
4.2	Valores dos limites e da razão de verossimilhança. . . . .	34

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Teste de Hipóteses</b>	<b>9</b>
1.1 Teste da Razão de Verossimilhanças Simples . . . . .	12
<b>2 Teste de Hipóteses Sequencial</b>	<b>14</b>
<b>3 Distribuição Exponencial</b>	<b>16</b>
3.1 Teste de Hipóteses para a distribuição Exponencial . . . . .	18
3.2 Teste de Hipóteses Sequencial para a distribuição Exponencial . . . . .	23
<b>4 Exemplo do Teste de Hipóteses Convencional e Teste de Hipóteses Sequencial sobre o parâmetro da distribuição Exponencial</b>	<b>25</b>
4.1 Teste de Hipóteses Convencional . . . . .	26
4.2 Teste de Hipóteses Sequencial . . . . .	30
<b>Considerações Finais</b>	<b>37</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>38</b>



# Introdução

A Inferência Estatística é uma área da Estatística que consiste em fazer afirmações sobre características de uma população com base em informações obtidas por dados amostrais. Essas afirmações estão associadas a dois métodos da inferência estatística: Estimacão e Teste de Hipóteses. Neste trabalho, será abordado Teste de Hipóteses.

Para a realização de teste de hipóteses especifica-se duas hipóteses, denominadas hipótese nula ( $H_0$ ) e hipótese alternativa ( $H_1$ ), e um critério para a rejeição da hipótese nula. Hipóteses são afirmações as quais se deseja verificar sobre o valor dos parâmetros populacionais. Assim, o teste fornece um procedimento para tomar uma decisão sobre rejeitar ou não uma das hipóteses, por meio dos resultados de uma amostra.

Uma metodologia alternativa para o teste de hipóteses é o teste de hipóteses sequencial que foi desenvolvido por Wald (1947), este caracteriza-se por envolver amostras de tamanho variável determinadas pelos dados observados, ou seja, a amostra corresponde a uma variável aleatória. Já nos testes de hipóteses convencionais, o tamanho da amostra é fixado antes do experimento.

Assim, um teste sequencial, a partir da razão de probabilidade determina-se, após cada observação realizada, se as informações disponíveis são suficientes para aceitar ou rejeitar a hipótese nula.

A distribuição Exponencial é uma distribuição contínua de probabilidade que é muito usada para descrever tempo de sobrevivência de materiais, entretanto, a maioria dos livros de estatística básica não apresenta Teste de Hipóteses sobre o parâmetro desta distribuição, o mais comum é sobre os parâmetros média da distribuição Normal e proporção da distribuição Binomial.

Desse modo, objetivou-se escrever formalmente os conceitos envolvidos na teoria de Teste de Hipóteses, seguindo principalmente as definições dadas por Mood, Graybill e Boes (1974) e Casella e Berger (2002). Além disso, foi desenvolvido passo a passo a teoria matemática envolvida no Teste de Hipóteses Convencional e Sequencial sobre o parâmetro da distribuição Exponencial, além de aplicar tais testes em um exemplo para a comparação entre as duas metodologias abordadas neste trabalho.

# Capítulo 1

## Teste de Hipóteses

O objetivo da Inferência Estatística é fazer afirmações sobre características de uma população a partir de dados amostrais, e um dos problemas básicos dessa área é o de confirmar essas afirmações. Assim, o Teste de Hipóteses proporciona um método para verificar se os dados de uma amostra contrariam ou apoiam uma afirmação feita sobre a população (BUSSAB & MORETTIN, 2006).

Essas afirmações são consideradas hipóteses estatísticas, e de acordo com Casella e Berger (2002), pode-se definir que uma hipótese estatística é uma afirmação sobre um parâmetro populacional.

Assim, seja  $\Theta$  um espaço paramétrico, uma hipótese estatística  $H$  é simplesmente uma especificação de um subconjunto de  $\Theta$ . Se uma hipótese estatística determina totalmente a distribuição, isto é, especifica um subconjunto com apenas um ponto de  $\Theta$  ela é chamada de hipótese simples e caso contrário, é chamada de hipótese composta (MOOD, GRAYBILL & BOES, 1974).

Isto é, seja  $\theta$  um parâmetro populacional e  $\theta_0$  o verdadeiro valor de  $\theta$ . Então, uma hipótese simples é da forma:  $H : \theta = \theta_0$  e composta:  $H : \theta > \theta_0$  ou  $H : \theta < \theta_0$ , e ainda tem-se a hipótese precisa, que assume a forma:  $H : \theta \neq \theta_0$ .

Para a realização do teste de hipóteses, explicita-se duas hipóteses, denominadas de hipótese nula, denotada por  $H_0 : \{\theta \in \Theta_0\}$ , e hipótese alternativa, denotada por  $H_1 : \{\theta \in \bar{\Theta}_0\}$ , com  $\Theta_0 \cup \bar{\Theta}_0 = \Theta$  (MOOD, GRAYBILL & BOES, 1974).

A hipótese nula ( $H_0$ ) é uma hipótese simples, que sugere um valor para o parâmetro populacional ou ainda, representa uma igualdade dos parâmetros a serem testados, ou seja,  $H_0 : \theta = \theta_0$ .

A hipótese alternativa ( $H_1$ ), é a hipótese que será considerada aceitável caso não haja evidências estatísticas em favor da hipótese nula. Esta pode ser composta:  $H_1 : \theta > \theta_0$  ou  $H_1 : \theta < \theta_0$ , precisa:  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ , ou ainda simples:  $H_1 : \theta = \theta_1$ . Neste caso, as duas hipóteses não serão complementares, já que  $H_1 : \theta = \theta_1$ , onde  $\theta \in \Theta_1$ . As especificações das hipóteses depende do grau de conhecimento acerca do problema (HOGG & CRAIG, 1978).

Assim, de acordo com as possibilidades para a hipótese alternativa, tem-se:

- Teste unilateral à esquerda:  $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$
- Teste unilateral à direita:  $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$
- Teste bilateral:  $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$

Assim, depois de observar uma determinada amostra, o pesquisador deve decidir se rejeita ou não se rejeita  $H_0$ . Para isto, utiliza-se o teste de hipóteses que segundo Mood, Graybill e Boes (1974), pode ser definido como:

Seja  $\Upsilon$  um teste de uma hipótese estatística  $H$ , rejeita-se  $H$  se e somente se a amostra  $(x_1, \dots, x_n) \in C_\Upsilon$ , em que  $C_\Upsilon$  é um subconjunto do espaço amostral das observações;  $C_\Upsilon$  é chamado de região crítica ou de rejeição do teste  $\Upsilon$ .

Desse modo, um teste de  $H$  é uma decomposição do espaço amostral das realizações  $X^n$  em  $C_\Upsilon$  e  $\bar{C}_\Upsilon$  (complementar de  $C_\Upsilon$ ), de modo que se  $(x_1, \dots, x_n) \in C_\Upsilon$ ,  $H$  é rejeitada. Assim, um teste de hipóteses fica determinado quando especificamos sua região crítica (MOOD, GRAYBILL & BOES, 1974).

Desta forma, uma decisão será tomada a partir da consideração da região crítica. Se o valor observado pertencer a essa região, então rejeita-se  $H_0$ , caso contrário não rejeita-se  $H_0$ . A região crítica é sempre construída sob a hipótese de  $H_0$  ser verdadeira, pois geralmente não especifica-se valores fixos para o parâmetro sob a hipótese alternativa (BUSSAB & MORETTIN, 2006).

Ao tomar uma decisão de rejeitar ou aceitar uma hipótese nula, pode-se cometer dois tipos de erros: erro tipo I, pode-se rejeitar a hipótese nula  $H_0$ , quando de fato ela é verdadeira e erro tipo II, pode-se aceitar  $H_0$  quando de fato ela é falsa.

O tamanho do erro tipo I é definido como sendo a probabilidade de se cometer esse erro, esta é geralmente representada pela letra grega  $\alpha$ ; do mesmo modo, o tamanho do erro tipo II é a probabilidade de se cometer o erro tipo II, e é usualmente representada pela letra grega  $\beta$  (ANDRADE & OGLIARI, 2013). Na Tabela 1.1 são apresentadas esses erros e os tipos de decisão que podem ser tomadas:

Tabela 1.1: Tipos de erro cometidos em testes de hipótese.

	Decisão	
Realidade	Aceitar a hipótese nula	Rejeitar a hipótese nula
Hipótese nula verdadeira	Decisão correta ( $1-\alpha$ )	Erro Tipo I ( $\alpha$ )
Hipótese nula falsa	Erro Tipo II ( $\beta$ )	Decisão correta ( $1-\beta$ )

O ideal é que ambas as probabilidades dos erros sejam pequenas, mas geralmente, ao se tentar diminuir a probabilidade do erro tipo I, não se consegue controlar o valor da probabilidade do erro tipo II.

Para um tamanho de amostra fixo, geralmente é impossível tornar ambos os tipos de probabilidades de erros arbitrariamente pequenos. Este dilema é resolvido tentando-se obter testes que possuam um valor predeterminado de probabilidade de erro tipo I e o menor valor possível para a probabilidade de erro tipo II (CASELLA & BERGER, 2002).

Geralmente, fixa-se  $\alpha$  em uma probabilidade pequena, usualmente em 0,05 ou 0,01. A justificativa para se fixar o tamanho do erro tipo I é que, normalmente, as hipóteses são elaboradas de forma que a hipótese nula seja mais importante do que a hipótese alternativa; sendo assim, a ocorrência do erro tipo I, recusar a hipótese nula sendo esta verdadeira, é mais grave do que o erro em se recusar a hipótese alternativa sendo esta verdadeira.

O poder do teste é a probabilidade de rejeitar  $H_0$  quando  $H_0$  é realmente falsa, ou seja, o poder de um teste é igual a  $1 - \beta$ . A função poder do teste  $\Upsilon$  associa a cada valor de  $\theta$  a probabilidade  $\pi_{\Upsilon}(\theta)$  de rejeitar  $H_0$ , ela é definida como  $\pi_{\Upsilon}(\theta) = P_{\theta}[\text{rejeitar } H_0]$ . Ou seja,  $\pi_{\Upsilon}(\theta) = P_{\theta}[(X_1, \dots, X_n) \in C_{\Upsilon}]$ , em que  $C_{\Upsilon}$  é a região crítica do teste  $\Upsilon$ . Esta função é uma ferramenta utilizada para verificar a adequação de um teste ou para comparar dois ou mais testes. Assim, uma função poder é ideal quando a probabilidade de rejeitar  $H_0$  sendo ela verdadeira é igual a 0, e a probabilidade igual a 1 de rejeitar  $H_0$  sendo realmente falsa (BUSSAB & MORETTIN, 2006).

A função poder de um teste geralmente depende do tamanho da amostra  $n$ , assim se  $n$  pode ser escolhido pelo pesquisador, a consideração da função poder pode ajudar a determinar que tamanho de amostra é adequado em um experimento.

De acordo com Mood, Graybill e Boes (1974), o tamanho do teste  $\Upsilon$  é definido como o tamanho da região crítica. Um teste  $\Upsilon^*$  de  $H_0 : X \sim f_0(.; \theta_0)$  contra  $H_1 : X \sim f_1(.; \theta_1)$ , sendo  $\theta_0$  e  $\theta_1$  conhecidos, é dito ser um teste mais poderoso de tamanho  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) se e somente se:

- (i)  $\pi_{\Upsilon^*}(\theta_0) = \alpha$ ;
- (ii)  $\pi_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq \pi_{\Upsilon}(\theta_1)$ , para qualquer outro teste  $\Upsilon$  para o qual  $\pi_{\Upsilon}(\theta_0) \leq \alpha$ .

Desse modo, um teste  $\Upsilon^*$  é mais poderoso de tamanho  $\alpha$  se ele possui o tamanho de seu erro tipo I igual a  $\alpha$  e tem menor tamanho do erro tipo II sobre todos os outros testes com tamanho de erro tipo I igual a  $\alpha$  ou menor.

É importante ressaltar que, segundo Mood, Graybill e Boes (1974), a maioria dos autores usam os termos “tamanho do teste” e “nível de significância” de forma equivalente. Entretanto, há uma diferença entre estes termos, já que “nível de significância” se refere a “testes de significância”, que é um tipo de inferência estatística que está intimamente

relacionado com os testes de hipóteses, que muitos autores não fazem distinção.

O teste de significância foi proposto por Ronald Fisher, em que testa-se  $H_0 : \theta = \theta_0$  e a principal diferença entre o teste de hipóteses está em não construir a região crítica, neste especifica-se um tamanho do teste  $\alpha$  pré-experimental, enquanto no teste de significância, o cálculo é pós-experimental, apresentado uma medida de evidência contra ou a favor da hipótese nula, conhecido como valor-p, e a partir desta é possível tomar uma decisão sobre a rejeição ou não da hipótese nula (ANDRADE & OGLIARI, 2013).

## 1.1 Teste da Razão de Verossimilhanças Simples

Neste trabalho, será abordado a teoria de testes de hipóteses considerando apenas hipóteses simples. Assim, seja uma amostra aleatória  $X_1, \dots, X_n$  originada de uma dentre duas distribuições completamente especificadas  $f_0(x)$  e  $f_1(x)$ , o objetivo é decidir de qual delas vem a amostra. Neste caso o espaço paramétrico  $\Theta$  contém apenas dois pontos,  $\theta_0$  e  $\theta_1$ . Desse modo, testa-se as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

Para encontrar procedimentos de testes, ou seja, a estatística do teste, o método da razão de verossimilhanças é bastante utilizado (CASELLA & BERGER, 2002).

A função de verossimilhança é definida como:

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = L(\theta|x) = f(x|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

Assim, um teste  $\Upsilon$  de  $H_0 : X \sim f_0(\cdot; \theta_0)$  contra  $H_1 : X \sim f_1(\cdot; \theta_1)$  é definido sendo um teste de razão de verossimilhanças simples se  $\Upsilon$  é definido por:

Rejeita-se  $H_0$  se  $B \leq b_c$ ;

Aceita-se  $H_0$  se  $B > b_c$ .

Em que  $b_c$  é uma constante não-negativa, chamado de valor crítico, ou ainda valor tabelado, e  $B$  é a razão de verossimilhanças, dada por:

$$B = B(x_1, \dots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^n f_0(x_i)}{\prod_{i=1}^n f_1(x_i)} = \frac{L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)}{L(\theta_1; x_1, \dots, x_n)} = \frac{L_0}{L_1}$$

Onde  $L_j$  é a função de verossimilhança para a amostra de densidade  $f_j(\cdot)$ , para o caso de amostras independentes para cada valor de  $b_c$  tem-se um teste diferente.

A importância dos testes de razão de verossimilhanças se dá em consequência do resultado fundamental, citado em Mood, Graybill e Boes (1974):

**Lema de Neyman-Pearson:** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de uma função densidade de probabilidade  $f(x; \theta)$ , em que  $\theta$  representa um dos dois valores conhecidos  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , e seja  $0 < \alpha < 1$  fixado. Seja  $b_c$  uma constante positiva e  $C^*$  um subconjunto de  $X^n$ , tal que satisfaça:

$$(i) P_{\theta_0} [(X_1, \dots, X_n) \in C^*] = \alpha$$

$$(ii) B(x_1, \dots, x_n) = \frac{L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)}{L(\theta_1; x_1, \dots, x_n)} = \frac{L_0}{L_1} \leq b_c \text{ se } (x_1, \dots, x_n) \in C^* \text{ e } B(x_1, \dots, x_n) > b_c \text{ se } (x_1, \dots, x_n) \in \bar{C}^*$$

Então, o teste  $\Upsilon^*$  correspondente à região crítica  $C^*$  é o teste mais poderoso de tamanho  $\alpha$  relativo ao teste de hipóteses simples dado por  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta = \theta_1$ .

Para se calcular o tamanho de um teste é necessária uma integração múltipla sobre a região crítica, que em geral pode ser muito difícil.

$$P [(X_1, \dots, X_n) \in C_{\Upsilon}] = \int \dots \int_{C_{\Upsilon}} \prod f(x_i; \theta) dx_i$$

Nos testes de razão de verossimilhanças a região crítica do teste é geralmente dada em termos de uma desigualdade que depende da razão de verossimilhanças, a estatística  $B(X_1, \dots, X_n)$ . Um método alternativo a este procedimento é obter a função densidade de probabilidade da estatística  $B(X_1, \dots, X_n)$  sob  $H_0$ ,  $f_B^0(b)$ , e fazer a integração simples  $\int_0^{b_c} f_B^0(b) db$ . Tal procedimento é, em geral, também bastante complexo. Desse modo, o usual é obter uma desigualdade equivalente em termos de uma outra estatística suficiente  $S$ , para o qual seja mais fácil obter a distribuição de probabilidade. Assim,

$$B(X) \leq b_c \Leftrightarrow S \leq k$$

Seja  $\theta$  um parâmetro de interesse, o princípio da suficiência estabelece que uma estatística  $S(X)$  é dita suficiente para o parâmetro  $\theta$  se ela captura toda a informação sobre  $\theta$  contida na amostra, e não depende do parâmetro  $\theta$  (CASELLA & BERGER, 2002).

## Capítulo 2

# Teste de Hipóteses Sequencial

O teste sequencial é um teste de hipóteses, em que o número de observações que o plano amostral requer não é conhecido antecipadamente, este caracteriza-se por envolver amostras de tamanho variável determinadas pelos dados observados. Neste teste, a decisão de aceitar ou rejeitar uma hipótese é realizada a cada passo, assim, o tamanho total da amostra depende da informação acumulada a cada observação, diferente da amostragem convencional, que possui um número fixo pré-determinado de amostras (BARBOSA, 1992).

Uma outra distinção entre as duas amostragens, é que enquanto a amostragem convencional procura estimar os parâmetros populacionais para depois, eventualmente testar uma hipótese a respeito dos mesmos, na amostragem sequencial é testada uma hipótese desses parâmetros sem a preocupação inicial de estimá-los (NAGELKERKE & HART, 1980).

Como a decisão de terminar a amostragem e tomar uma decisão depende dos resultados obtidos em cada passo, o teste sequencial pode diminuir o tempo e os custos da análise em relação aos testes convencionais. Geralmente, os testes em que as amostras são pré-fixadas necessitam de amostras com um número elevado de itens, o que acarreta em um alto custo para os testes, além de um maior tempo para a realização dos mesmos. Na amostragem sequencial as amostras possuem em média, um terço do tamanho que seria usado na amostragem de tamanho fixo, evitando assim desperdícios com medições desnecessárias. Desse modo, o teste sequencial pode ser mais vantajoso (FONSECA, 2008).

O método de teste sequencial foi desenvolvido inicialmente por Wald (1947), em que se baseia na razão de probabilidade para determinar, após cada observação feita, se informações disponíveis são suficientes para aceitar ou rejeitar a hipótese nula ( $H_0$ ). A função  $f_0(x_i, k)$  representa a função probabilidade do resultado amostral,  $x_i = (x_1, \dots, x_k)$  quando  $H_0$  é verdadeira e  $f_1(x_i, k)$  representa a função probabilidade quando  $H_1$  é verdadeira.

O teste de razão de probabilidade verifica a razão  $R_k = \frac{f_1(x_i, k)}{f_0(x_i, k)}$ , chamada de razão de verossimilhança. Quando esta razão é grande, evidencia pontos para  $f_1$  como a verdadeira função probabilidade, logo é favorável em relação a  $H_1$ , quando é pequena, evidencia

pontos para  $H_0$ . Valores intermediários são inconclusivos, portanto a decisão tomada é de continuar o experimento.

Valores de limites  $A$  e  $B$  são escolhidos para satisfazer especificações de erro para o teste de hipóteses. Usando  $\alpha$  e  $\beta$  para representar a probabilidade desses erros, respectivamente,  $A$  e  $B$  são calculados de acordo com:

$$A = \frac{\beta}{(1 - \alpha)}$$

e

$$B = \frac{(1 - \beta)}{\alpha}$$

Um teste sequencial baseado nestes valores de limite terão probabilidades de erro aproximadamente iguais aos valores nominais  $\alpha$  e  $\beta$ . Assim, o teste sequencial examina as unidades amostrais em sequência até que os resultados são comparados com limites previamente determinados, da seguinte maneira (WALD, 1947):

- Se  $\frac{f_1(x_i, k)}{f_0(x_i, k)} \leq \frac{\beta}{(1 - \alpha)}$ , aceita-se  $H_0$ ;
- Se  $\frac{f_1(x_i, k)}{f_0(x_i, k)} \geq \frac{(1 - \beta)}{\alpha}$ , rejeita-se  $H_0$ ;
- Se  $\frac{\beta}{(1 - \alpha)} < \frac{f_1(x_i, k)}{f_0(x_i, k)} < \frac{(1 - \beta)}{\alpha}$ , inconclusivo, continua-se o experimento.

Logo, a partir da primeira observação uma decisão deve ser tomada no sentido de aceitar ou rejeitar a hipótese nula, ou então a de se continuar amostrando. Caso a decisão a ser tomada for continuar a amostragem outra unidade amostral é examinada e, com base nos resultados acumulados dos dois itens da amostra chega-se a uma das três decisões novamente. O processo se prolonga até que seja tomada a decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese nula (DUARTE; DE SOUZA & CARVALHO, 2001).



## Capítulo 3

# Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é uma distribuição contínua de probabilidade amplamente aplicada em confiabilidade de sistemas, tempos de sobrevivência, tempos de falha, entre outros (BUSSAB & MORETTIN, 2006).

Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Em que  $\theta$  é o parâmetro de taxa da distribuição, e escreve-se  $X \sim \text{Exp}(\theta)$ , para indicar que tem distribuição exponencial de parâmetro  $\theta$ .

O valor esperado e a variância são, respectivamente:

$$E(X) = \frac{1}{\theta}; V(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

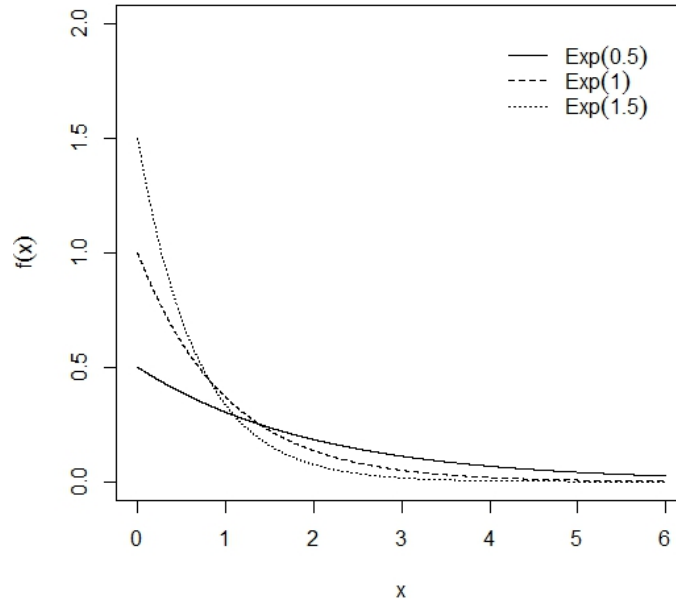
Isto acontece, pois como  $E(X) = \int x f(x) dx$ , então  $E(X) = \int_0^{\infty} x \theta e^{-\theta x} dx$  que, integrando por partes com  $u = x dx$  e  $dv = \theta e^{-\theta x}$ , tem-se que  $du = dx$  e  $v = -e^{-\theta x}$ . Logo,  $E(X) = -x \theta e^{-\theta x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\theta x} dx = 0 + \frac{e^{-\theta x}}{\theta} = \frac{1}{\theta}$ . Integrando por partes duas vezes, obtém-se:  $E(X^2) = \frac{2}{\theta^2}$  e, portanto,  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$  (MOOD, GRAYBILL & BOES, 1974).

A distribuição exponencial acumulada é dada por:

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A Figura 3.1 ilustra a função densidade da distribuição exponencial para alguns valores de  $\theta$ :

Figura 3.1: Funções densidade de probabilidade da distribuição exponencial.



Fonte: Autora, 2019.

A distribuição exponencial é um caso particular da distribuição gama, cuja função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x; n, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} \theta^n e^{-\theta x} , & \text{se } x \geq 0 \\ 0 , & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

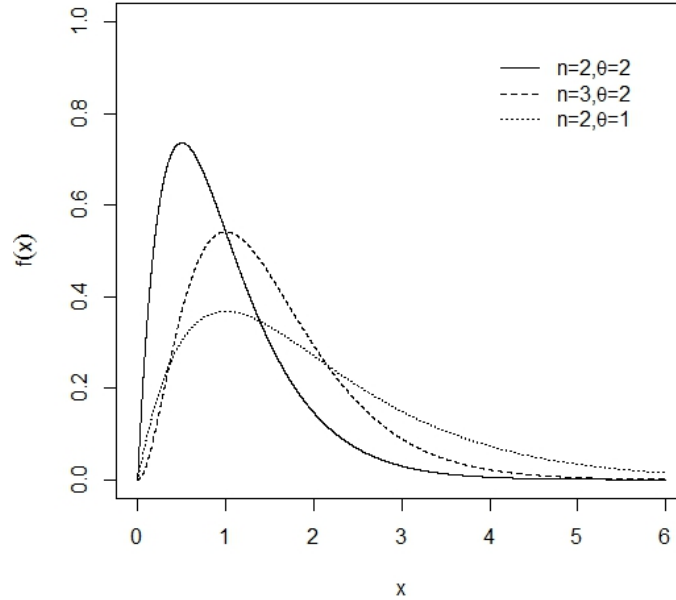
Onde  $n > 0$  é o parâmetro de forma e  $\theta > 0$ , parâmetro de escala e escreve-se  $X \sim \text{Gama}(n, \theta)$ , para indicar que  $X$  tem distribuição gama com parâmetros  $n$  e  $\theta$ . Assim, para  $n = 1$  a função densidade de probabilidade da distribuição gama se reduz à exponencial. A função  $\Gamma(n)$  é a função gama, em que  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ , sendo  $n$  inteiro positivo.

O valor esperado e a variância são definidos respectivamente por:

$$E(X) = \frac{n}{\theta}; V(X) = \frac{n}{\theta^2}$$

A Figura 3.2 ilustra a densidade da distribuição Gama para alguns valores dos parâmetros de forma e escala:

Figura 3.2: Funções densidade de probabilidade da distribuição gama.



Fonte: Autora, 2019.

Em muitos casos é comum encontrar uma outra parametrização da distribuição exponencial, dada por:

$$f\left(x; \frac{1}{\lambda}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} . \quad (3.3)$$

Assim, diz-se que  $\lambda$  é o parâmetro de escala da distribuição e este é o inverso do parâmetro taxa. Desse modo, é importante verificar qual das duas especificações está sendo utilizada quando escreve-se  $X \sim \text{Exp}(a)$ , se  $a$  está se referindo ao parâmetro taxa ou ao parâmetro escala da distribuição (MAGALHÃES & LIMA, 2008).

### 3.1 Teste de Hipóteses para a distribuição Exponencial

Para encontrar a função densidade de probabilidade da estatística  $B(X)$  razão de verossimilhanças e sua distribuição acumulada de uma amostra advinda de uma distribuição Exponencial, foi desenvolvido a teoria de teste de hipóteses para esta distribuição de acordo com Brighenti (2007).

Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial  $f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}$ .

Um teste mais poderoso de tamanho  $\alpha$  para testar as hipóteses simples  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta = \theta_1$ , sendo  $\theta_0 < \theta_1$ , é o de razão de verossimilhanças, portantoo:

$$L_0 = \prod_{i=1}^n f_0(x_i) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_0) = \prod_{i=1}^n \theta_0 e^{-\theta_0 x_i} =$$

$$= (\theta_0 e^{-\theta_0 x_1}) \cdot (\theta_0 e^{-\theta_0 x_2}) \cdot \dots \cdot (\theta_0 e^{-\theta_0 x_n}) = \theta_0^n e^{-\theta_0(x_1+x_2+\dots+x_n)} = \theta_0^n e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i}$$

De modo análogo, obtém-se  $L_1$ . Portanto, tem-se:

$$L_0 = \theta_0^n \exp \left\{ -\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

e

$$L_1 = \theta_1^n \exp \left\{ -\theta_1 \sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

E a razão de verossimilhanças será:

$$B(x_1, \dots, x_n) = \frac{L_0}{L_1} = \frac{\theta_0^n \exp \left\{ -\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i \right\}}{\theta_1^n \exp \left\{ -\theta_1 \sum_{i=1}^n x_i \right\}} = \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ -(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

A família de testes dada pela razão de verossimilhanças consiste em rejeitar  $H_0$  se

$$B(x_1, \dots, x_n) \leq b_c \Rightarrow \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ -(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n x_i \right\} \leq b_c \quad (3.4)$$

Para obter, entre esses testes, aquele de tamanho pré-determinado, por exemplo,  $\alpha = 0,05$ , o procedimento usual é obter a desigualdade equivalente:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ -(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n x_i \right\} \leq b_c \Rightarrow \\ & \Rightarrow \exp \left\{ -(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n x_i \right\} \leq \left[ b_c \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \ln e^{\left\{ -(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n x_i \right\}} \leq \ln \left[ b_c \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow -(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n x_i \leq \ln \left[ b_c \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ b_c \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n \right] = k \quad (3.5)$$

Logo,  $\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ b_c \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n \right]$  é a desigualdade equivalente em termos de uma outra estatística suficiente  $S$ , e esta independe dos parâmetros.

Portanto, rejeita-se  $H_0$  se  $\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ b_c \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n \right]$ .

Tem-se que  $Y = \sum_{i=1}^n x_i$  possui uma distribuição gama com parâmetros  $n$  e  $\theta$ . Isto é,  $f_{\sum_{i=1}^n x_i}(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} y^{n-1} \theta^n e^{-\theta y}$ . Assim, para obter o valor de  $k$ , resolve-se a equação integral:

$$P_{\theta_0} \left[ \sum_{i=1}^n x_i \leq k \right] = \int_0^k \frac{1}{\Gamma(n)} y^{n-1} \theta_0^n e^{-\theta_0 y} dy = 0,05 \quad (3.6)$$

Será conveniente calcular diretamente a distribuição da variável  $B(X_1, \dots, X_n) = \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ -(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n x_i \right\}$ . Desse modo, para determinar a distribuição da razão de verossimilhanças  $B(X)$ , ou seja, a densidade de  $B$ , utiliza-se o teorema de transformação de variáveis (MOOD, GRAYBILL & BOES, 1974):

$$f_B(b) = \left| \frac{d}{db} g^{-1}(b) \right| f_Y(g^{-1}(b))$$

Tem-se que  $B = g(Y) = \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \{ -(\theta_0 - \theta_1) Y \}$  é a exponencial de uma variável com distribuição Gama de parâmetros  $(n, \theta)$ . Expressando  $Y$  como função de  $B$ , tem-se que:

$$g^{-1}(b) = \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \Rightarrow \frac{d}{db} g^{-1}(b) = 0 \cdot \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] + \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)b} \quad (3.7)$$

para  $\theta_1 > \theta_0$ .

$$f_Y(g^{-1}(b)) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \left\{ \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right\}^{n-1} e^{-\theta \left\{ \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right\}} \quad (3.8)$$

Utilizando (3.7) e (3.8) tem-se que:

$$f_B(b) = \left| \frac{d}{db} g^{-1}(b) \right| f_Y(g^{-1}(b)) = \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)b} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \left\{ \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right\}^{n-1} e^{-\theta \left\{ \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right\}}$$

$$f_B(b) = \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)b} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \left\{ \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right\}^{n-1} e^{-\theta \left\{ \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right\}} \quad (3.9)$$

Para um determinado valor de  $\alpha$ , é necessário resolver a equação integral

$$\int_0^{b_c} \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)b} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \left\{ \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right\}^{n-1} e^{-\theta \left\{ \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right\}} db = \alpha$$

Usando substituição de variáveis:

$$u = \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right]$$

$$du = \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)b} db$$

$$b = 0 \Rightarrow u = -\infty$$

$$b = b_c \Rightarrow u = \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b_c \right]$$

Assim, substituindo tem-se:

$$F_B^0(b) = \int_0^{\frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right]} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} u^{n-1} e^{-\theta u} du$$

Para  $\theta = \theta_0$ , tem-se:

$$F_B^0(b) = \int_0^{\frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right]} \frac{\theta_0^n}{\Gamma(n)} u^{n-1} e^{-\theta_0 u} du \quad (3.10)$$

Fazendo novamente uma substituição  $w = \theta_0 u$  :

$$\begin{cases} w = \theta_0 u \\ dw = \theta_0 du \end{cases}$$

$$u = 0 \Rightarrow w = 0$$

$$u = \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \Rightarrow w = \frac{\theta_0}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right]$$

$$F_B^0(b) = \int_0^{\frac{\theta_0}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right]} \frac{1}{\Gamma(n)} w^{n-1} e^{-w} dw = \Gamma \left( n, \frac{\theta_0}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right)$$

em que  $\Gamma(n, t) = \left( \frac{1}{\Gamma(n)} \right) \int_0^t y^{n-1} \exp\{-y\} dy$  é a função gama incompleta. Então, tem-se:

$$F_B^0(b) = P_{\theta=\theta_0} (B(X) \leq b) = \Gamma \left( n, \frac{\theta_0}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right) \quad (3.11)$$

De maneira análoga, obtém-se para  $\theta = \theta_1$ , fazendo uma substituição  $w = \theta_1 u$  em (1.10),

$$\begin{cases} w = \theta_1 u \\ dw = \theta_1 du \end{cases}$$

$$u = 0 \Rightarrow w = 0$$

$$u = \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \Rightarrow w = \frac{\theta_1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right]$$

$$F_B^1(b) = \int_0^{\frac{\theta_1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right]} \frac{1}{\Gamma(n)} w^{n-1} e^{-w} dw \quad (3.12)$$

$$F_B^1(b) = P_{\theta=\theta_1} (B(X) \leq b) = \Gamma \left( n, \frac{\theta_1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b \right] \right) \quad (3.13)$$

Para  $\alpha = 0,05$ , tem-se a equação integral:

$$F_B^0(b) = P_{\theta=\theta_0} (B(X) \leq b_c) = \Gamma \left( n, \frac{\theta_0}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n b_c \right] \right) = 0,05$$

Uma maneira de garantir a importância de ambos os erros é obter testes em que  $\alpha = \beta$ , isto é:

$$F_B^0(b_c) = 1 - F_B^1(b_c) \quad (3.14)$$

Neste caso, garante-se que se um deles for pequeno, o outro também será e não há um valor pré-fixado para  $\alpha$  e sim uma condição  $\alpha = \beta$  que fornece um determinado valor

crítico  $b_c$ .

Para garantir  $\alpha = \beta$ , equivale a encontrar o valor de  $b_c$  que satisfaça a seguinte equação:

$$\Gamma\left(n, \frac{\theta_0}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n b_c \right]\right) = 1 - \Gamma\left(n, \frac{\theta_1}{(\theta_1 - \theta_0)} \ln \left[ \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n b_c \right]\right) \quad (3.15)$$

## 3.2 Teste de Hipóteses Sequencial para a distribuição Exponencial

Para a realização do teste de hipóteses sequencial obtém-se o plano de decisão sequencial no qual são definidas três regiões: a região de aceitação da hipótese nula, de rejeição da hipótese nula e de continuação do teste, essas regiões podem ser construídas através de retas e com auxílio de um procedimento gráfico pode-se tomar decisões (ESTEFANEL & BARBIN, 1979).

A obtenção deste plano para a distribuição exponencial baseado em Wald (1947) é através do cálculo da soma cumulativa do logaritmo da razão de verossimilhança,  $\log \Lambda_i$ , à medida que novos dados são avaliados, com  $S_0 = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots$ . Desse modo,  $S_i = S_{i-1} + \log \Lambda_i$ .

Em que  $\log \Lambda_i$ , para uma amostra, é:

$$\begin{aligned} \log \Lambda(x) &= \log \left( \frac{\theta_1^{-1} e^{-\frac{x}{\theta_1}}}{\theta_0^{-1} e^{-\frac{x}{\theta_0}}} \right) = \log \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} e^{\frac{x}{\theta_0} - \frac{x}{\theta_1}} \right) = \\ &= \log \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right) + \log \left( e^{\frac{x}{\theta_0} - \frac{x}{\theta_1}} \right) = -\log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) + \left( \frac{x}{\theta_0} - \frac{x}{\theta_1} \right) = \\ &= -\log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) + \left( \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1} \right) x \end{aligned}$$

A soma acumulada para todo  $x$  é:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \log \Lambda(x_i) = -n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) + \left( \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1} \right) \sum_{i=1}^n x_i$$

A regra de parada será:

- Se  $S_i \leq A$ , aceita-se  $H_0$ ;
- Se  $S_i \geq B$ , rejeita-se  $H_0$ ;
- Se  $A < S_i < B$ , continua-se o experimento.



Assim,  $A < -n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) + \left( \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1} \right) \sum_{i=1}^n x_i < B$

Reorganizando, para facilitar, tem-se:

$$A + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) < \left( \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1} \right) \sum_{i=1}^n x_i < B + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ A + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right) < \sum_{i=1}^n x_i < \left[ B + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right) \quad (3.16)$$

Portanto, tem-se as seguintes regras para tomar uma decisão:

- Se  $\left[ A + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right) < \sum_{i=1}^n x_i$ , aceita-se  $H_0$ ;
- Se  $\left[ B + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right) > \sum_{i=1}^n x_i$ , rejeita-se  $H_0$ ;
- Se  $\left[ A + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right) < \sum_{i=1}^n x_i < \left[ B + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right)$ , continua-se o experimento.

Desse modo, pode-se utilizar um procedimento gráfico, onde  $\left[ A + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right)$  e  $\left[ B + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right)$ , determinam retas paralelas com coeficiente angular  $\log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right)$  e vão ser denotadas por:  $h_0 = \left[ A + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right)$  e  $h_1 = \left[ B + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) \right] \cdot \left( \frac{\theta_0 \theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \right)$ . Elas são consideradas limites pois se o ponto indicado por  $\sum_{i=1}^n x_i$ , cair abaixo de  $h_0$ , aceita-se a hipótese nula, se o ponto cair acima da reta superior, rejeita-se a hipótese nula. Se o ponto cair entre as duas linhas paralelas, a avaliação deve ser continuada sem uma decisão.

## Capítulo 4

# Exemplo do Teste de Hipóteses Convencional e Teste de Hipóteses Sequencial sobre o parâmetro da distribuição Exponencial

Desenvolveu-se o exemplo a seguir para aplicar o teste de hipóteses convencional e sequencial para a distribuição exponencial:

**Exemplo:** Uma fábrica utiliza dois métodos para a produção de lâmpadas, método A e método B, tendo eles diferença de custo de produção e durabilidade. As lâmpadas produzidas pelo método A seguem uma distribuição exponencial com parâmetro  $1/100$  e as do método B, seguem uma exponencial de parâmetro  $1/200$ . As embalagens para o consumidor final são semelhantes, no entanto, ao realizar compra de lâmpadas em uma loja é possível testá-las, em função da durabilidade, qual foi a qualidade de lâmpadas a loja adquiriu na fábrica.

Supondo a compra de 20 lâmpadas e o registro de tempo de vida destas, é possível realizar o teste da seguinte maneira:

$H_0$ = as lâmpadas comercializadas pela loja são provenientes do método B de produção;

$H_1$ = as lâmpadas comercializadas pela loja são provenientes do método A de produção.

Utilizando o comando `rexp(20,0.01)` no software R (R Core Team, 2019), pode-se gerar uma amostra de valores de uma distribuição exponencial, em que o valor 20 é o tamanho da amostra e 0,01 o parâmetro da exponencial. Assim, tem-se os seguintes dados de

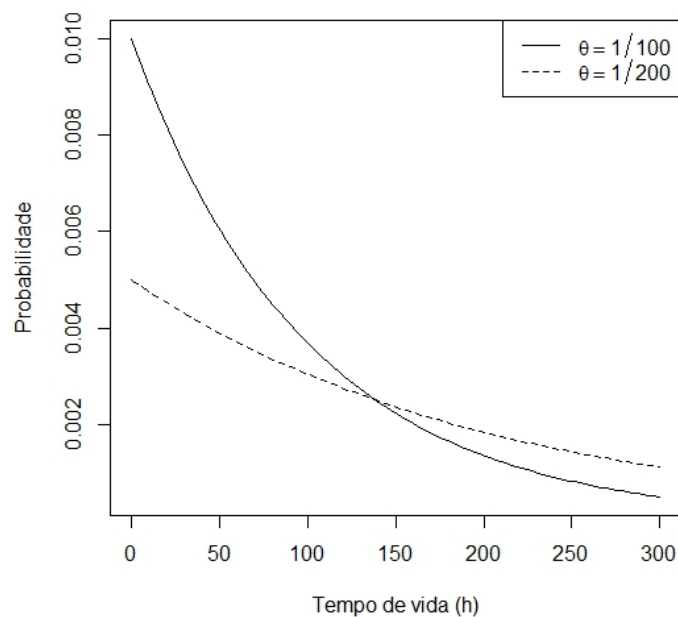
durabilidade, em horas:

$lamp=c(110.18, 94.86, 23.62, 329.31, 22.06, 32.78, 9.33, 5.55, 187.23, 159.66, 119.41, 6.11, 15.92, 42, 3.46, 283.20, 36.93, 31.03, 106.18, 62.110)$

O erro tipo I foi considerado igual a 5%, assim  $\alpha = 0,05$ .

A Figura 4.1 mostra a função densidade de probabilidade para as distribuições com os diferentes parâmetros.

Figura 4.1: Funções densidade de probabilidade para  $X \sim \text{Exp}(1/100)$  e  $X \sim \text{Exp}(1/200)$



Fonte: Autora, 2019.

## 4.1 Teste de Hipóteses Convencional

Primeiramente, para o teste de hipóteses clássico tem-se o seguinte desenvolvimento:

Sob as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \frac{1}{200} \\ H_1 : \theta = \frac{1}{100} \end{cases}$$

já que  $\theta_1 > \theta_0$

Para  $n = 20$  e  $\alpha = 0,05$ , pelo desenvolvimento dos cálculos anteriores para encontrar o valor crítico, utilizando a estatística suficiente, tem-se que:

$$P_{\theta_0} \left[ \sum_{i=1}^n x_i \leq k \right] = \int_0^k \frac{1}{\Gamma(n)} y^{n-1} \theta_0^n e^{-\theta_0 y} dy = 0,05$$

Onde  $\sum_{i=1}^{20} x_i = 1680,93$ , possui uma distribuição gama com os parâmetros  $n = 20$  e  $\theta = \frac{1}{200}$ . Desse modo, aplicando (3.6):

$$P_{\theta_0} [1680,93 \leq k] = \int_0^k \frac{1}{\Gamma(20)} y^{19} \left( \frac{1}{200} \right)^{20} e^{-\frac{y}{200}} dy = 0,05$$

Utilizando o software R (R Core Team, 2019), como auxílio para calcular a integral acima, tem-se:

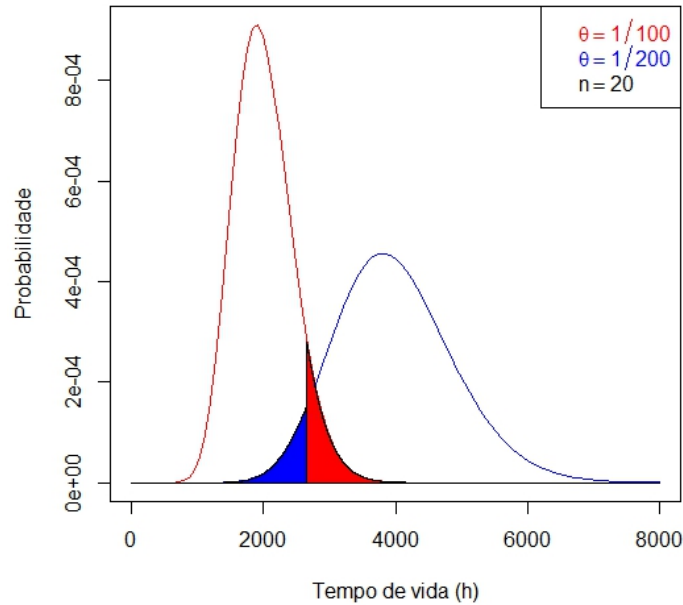
```
qgamma(0.05,20,0.005)
[1]2650.93
dgamma(2650.93,20,0.005)
[1]0.0001522128
integrate(gama,0, 2650.93)
0.04999995 with absolute error < 1.2e-10
```

Em que 2650,83 corresponde ao valor crítico, logo,  $k = 2650,93$ .

Assim, gerou-se a Figura 4.2, com as áreas hachuradas correspondentes ao erro tipo I,  $\alpha = 0,05$ , da distribuição sob  $H_0 : \theta = \frac{1}{200}$  e ao erro tipo II,  $\beta$ , da distribuição sob  $H_1 : \theta = \frac{1}{100}$ , a partir dos comandos:

```
curve(dgamma(x,20,0.01),xlim=c(0,8000),xlab=Tempo
de vida (h),ylab=Probabilidade)
curve(dgamma(x,20,0.005),ylab=Prababilidade,add=T,col=blue)
```

Figura 4.2: Gráficos exibindo as áreas correspondentes às probabilidades de erros tipo I e tipo II para o caso  $n=20$



Fonte: Autora, 2019.

Assim, o critério estabelecido anteriormente por (3.5) é: rejeita-se  $H_0$  se  $\sum x_i \leq k$ , desse modo como  $k=2650,93$  e  $\sum_{i=1}^{20} x_i = 1680,93$ , logo, conclui-se que as lâmpadas comercializadas pela loja são provenientes do método A de produção.

Neste teste considerou-se o tamanho  $n$  fixo em 20, e  $\alpha = 0,05$ , no entanto  $\beta$  não foi definido. Ele deve ser calculado no ponto  $k$  a partir da distribuição sob  $H_1$ , ou seja,  $\beta = 1 - \int_0^{2650,93} \frac{1}{\Gamma(20)} y^{19} \left(\frac{1}{100}\right)^{20} e^{-\frac{y}{100}} dy$ , e utilizando novamente o auxílio do software R para calcular  $\beta$ , tem-se:

```
1-pgamma(2650.93,20,0.01)
[1] 0.08151785
integrate(gama,0, 2650.93)
0.9184822 with absolute error <1.5e-05
```

Logo,  $\beta = 0,0815$ , que corresponde a um poder do teste de  $1 - \beta = 0,9185$ .

Se o objetivo fosse realizar o teste com erros iguais a 0,05 seria necessário uma amostra de tamanho maior, pois para  $\beta = 0,05$  o valor de  $k$  seria 2787,924 que não corresponde ao mesmo ponto crítico para  $\alpha = 0,05$ .

Já que, no R (R Core Team, 2019):

$qgamma(0.95, 20, 0.01)$ $2787.924$
--

Assim, para realizar o teste de hipóteses convencional com erros tipo I e tipo II iguais seria necessário aplicar a fórmula (3.15) desenvolvida anteriormente:

$$\Gamma\left(20, \frac{0,005}{(0,01 - 0,005)} \ln\left[\left(\frac{0,01}{0,005}\right)^{20} b_c\right]\right) = 1 - \Gamma\left(20, \frac{0,01}{(0,01 - 0,005)} \ln\left[\left(\frac{0,01}{0,005}\right)^{20} b_c\right]\right)$$

Se  $b_c$  for calculado por (3.5), que corresponde a um  $\alpha=0,05$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(0,01-0,005)} \ln\left[b_c\left(\frac{0,01}{0,005}\right)^{20}\right] &= 2650,93 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{13,25465} &= 1048576b_c \Rightarrow \\ \Rightarrow b_c &= 0,5443 \end{aligned}$$

No entanto,

$$\begin{aligned} &\Gamma\left(20, \frac{0,005}{(0,01 - 0,005)} \ln\left[\left(\frac{0,01}{0,005}\right)^{20} 0,5443\right]\right) \neq \\ &\neq 1 - \Gamma\left(20, \frac{0,01}{(0,01 - 0,005)} \ln\left[\left(\frac{0,01}{0,005}\right)^{20} 0,5443\right]\right) \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^{2650,93} \frac{1}{\Gamma(20)} y^{19} \left(\frac{1}{200}\right)^{20} e^{-\frac{y}{200}} dy$$

e

$$1 - \int_0^{2650,93} \frac{1}{\Gamma(20)} y^{19} \left(\frac{1}{100}\right)^{20} e^{-\frac{y}{100}} dy$$

Correspondem a áreas diferentes, que calculadas pelo R (R Core Team, 2019) fornecem as seguintes probabilidades:

$0.05000114$ with absolute error $< 1.2e-10$ $0.0815157$ with absolute error $< 1.5e-05$
---

Ou seja, não é possível tornar fixo os erros tipo I, tipo II e tamanho da amostra. Assim, para encontrar áreas iguais correspondentes aos erros tipo I e tipo II deve-se variar o tamanho da amostra.

## 4.2 Teste de Hipóteses Sequencial

Para o teste de hipóteses sequencial tem-se o seguinte:

Considerando a taxa de falha de  $1/\theta$ , e conseqüentemente o parâmetro de escala  $\theta$ , e os erros  $\alpha = \beta = 0,05$  então o teste de hipóteses é formulado por:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 100 \\ H_1 : \theta = 200 \end{cases}$$

já que  $\theta_1 > \theta_0$

Tem-se que  $A = \log \frac{\beta}{(1-\alpha)} = \log \frac{0,05}{0,95} = -2,944439$  e  $B = \log \frac{(1-\beta)}{\alpha} = \log \frac{0,95}{0,05} = 2,944439$ , substituindo  $A$  e  $B$  na fórmula (3.16) desenvolvida anteriormente, tem-se:

$$\begin{aligned} A + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) < + \left( \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1} \right) \sum_{i=1}^n x_i < B + n \log \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow -2,944439 + n \log 2 < \left( \frac{200-100}{200 \cdot 100} \right) \sum_{i=1}^n x_i < 2,944439 + n \log 2 &\Rightarrow \\ \Rightarrow -2,944439 + 0,6931n < \frac{1}{200} \sum_{i=1}^n x_i < 2,944439 + 0,6931n &\Rightarrow \\ \Rightarrow -588,8878 + 138,6294n < \sum_{i=1}^n x_i < 588,8878 + 138,6294n & \end{aligned}$$

Portanto,

$$-588,8878 + 138,6294n = h_0$$

e será a reta de aceitação da hipótese nula e

$$588,8878 + 138,6294n = h_1$$

de rejeição.

Desse modo, para cada valor de  $n$  são apresentados:

Tabela 4.1: Valores para os diferentes tamanhos de amostras.

$n$	$x_i$	$\sum_{i=1}^n x_i$	$h_0$	$h_1$
1	110,18	110,18	-450	728
2	94,86	205,04	-311	866
3	23,62	228,66	-173	1005
4	329,31	557,97	-34	1143
5	22,06	580,03	104	1282
6	32,78	612,81	243	1421
7	9,33	622,14	381	1559
8	5,55	627,69	520	1697
9	187,23	814,92	659	1836
10	159,66	974,58	797	1975
11	119,41	1093,99	936	2114
12	6,11	1100,1	1075	2252
13	15,92	1116,02	1213	2391
14	42,00	1158,02	1352	2530
15	3,46	1161,48	1490	2668
16	283,20	1444,68	1629	2807
17	36,93	1481,61	1768	2945
18	31,03	1512,64	1906	3084
19	106,18	1618,82	2045	3223
20	62,11	1680,93	2184	3361

A partir do software R (R Core Team, 2019) um script foi criado para construção do gráfico para maior facilidade:



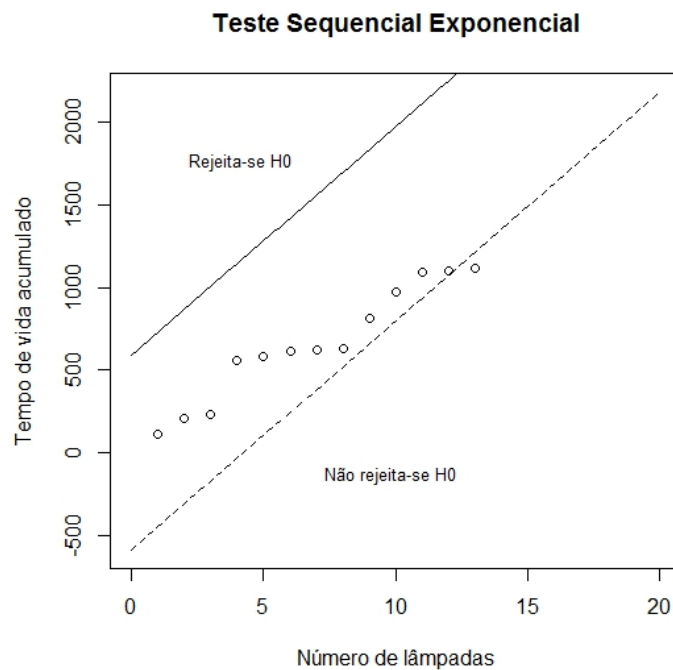
```

#sequencial
#inserir valores
alfa=0.05
beta=0.05
#inserir valores de parâmetros da exponencial
t0=100
t1=200
#retas de decisão
d=(t1-t0)/(t0*t1)
a=log(beta/(1-alfa))/d
b=log((1-beta)/alfa)/d
s=(log(t1/t0))/d
ax=function(x){a+(s*x)}
rx=function(x){b+(s*x)}
curve(ax, 0, 20, xlab=Número de lâmpadas,ylab=Tempo de vida acumulado,
main=Teste Sequencial Exponencial)
curve(rx, add =TRUE,col=blue)

```

Assim, tem-se a Figura 4.3:

Figura 4.3: Teste sequencial da razão de verossimilhanças da distribuição exponencial;

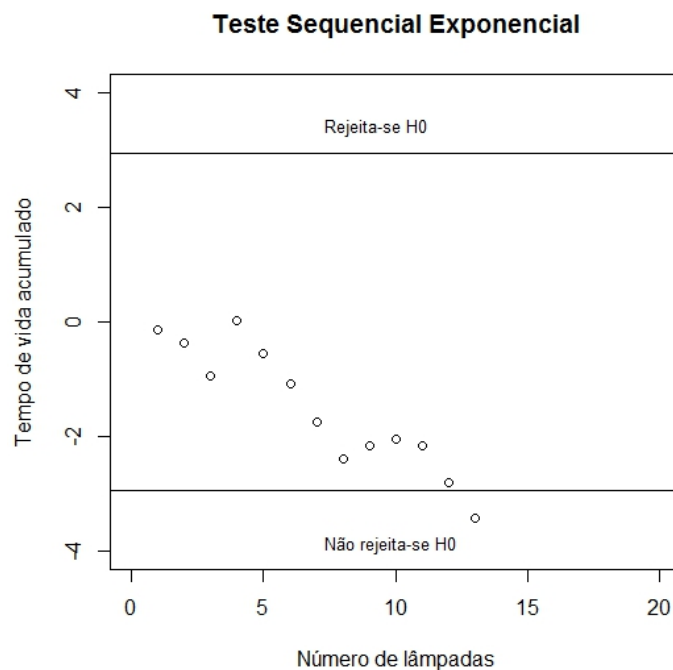


Fonte: Autora, 2019.

Assim, pelo gráfico é possível observar que aceita-se a hipótese nula com  $n = 13$ , pois o ponto caiu abaixo de  $h_o$ , ainda pode-se verificar realizando os cálculos que para  $n=13$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1116,02$ , logo  $1116,02 < 1213,295$ , concluindo que as lâmpadas comercializadas pela loja são provenientes do método A de produção.

Além disso, foi gerado o gráfico para o logaritmo da razão de verossimilhança, apresentado na Figura 4.4:

Figura 4.4: Teste sequencial do logaritmo da razão de verossimilhanças da distribuição exponencial.



Fonte: Autora, 2019.

O mesmo cálculo pode ser feito a partir do pacote SPRT, do software R, (R Core Team, 2019) novamente considerando a taxa de falha de  $1/\theta$ , e conseqüentemente o parâmetro de escala  $\theta$ , com a seguinte série de comandos:

```

lamp=c(110.18,94.86,23.62,329.31,22.06,32.78,9.33,5.55,187.23,159.66,119.41,6.11,
15.92,42,3.46,283.20,36.93,31.03,106.18,62.11)
lampadas <- SPRT(distribution = "exponential", type1 = 0.05, type2 = 0.05, h0 =
100, h1 = 200, values = lamp)
lampadas
plot(lampadas)
lampadas$h1.fn(n = seq(1,20,1))
lampadas$h0.fn(n = seq(1,20,1))
plot(lampadas)
plot(lampadas,log = "y", pch = 20, cex = 1.25, col = c(1,2,3))

```

Indicando  $n=20$  e que as hipóteses a serem testadas são:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 100 \\ H_1 : \theta = 200 \end{cases}$$

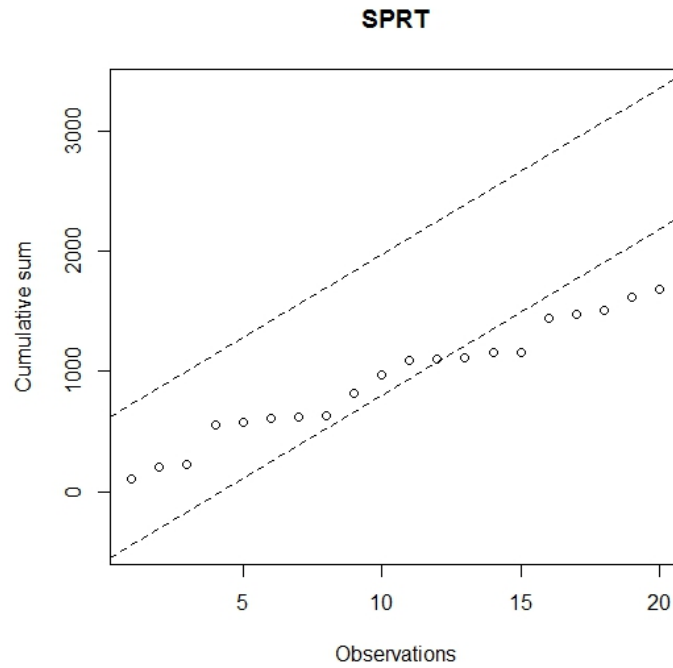
Do mesmo modo, tem-se que o logaritmo dos limites  $A$ ,  $B$  e da razão de verossimilhança são, confirmando os cálculos realizados anteriormente, pela Tabela 4.2:

Tabela 4.2: Valores dos limites e da razão de verossimilhança.

A	-2,944
B	2,944
Razão de Verossimilhança	-5,458

E gerou-se o respectivo gráfico da Figura 4.5:

Figura 4.5: Teste sequencial da razão de verossimilhanças da distribuição exponencial pelo pacote SPRT.

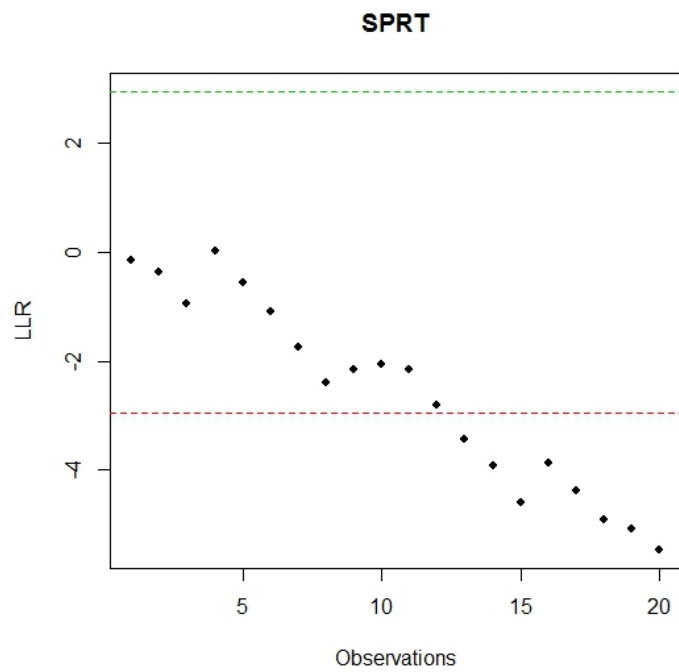


Fonte: Autora, 2019.

Em que pode-se observar que para  $n=13$  já é possível tomar uma decisão, sem a necessidade de continuar testando para toda a amostra. Desse modo toma-se a decisão de aceitar a hipótese nula, ou seja, os dados são de lâmpadas advindas do método A, obtendo o mesmo resultado dos anteriores.

Foi gerado também o gráfico para o logaritmo da razão de verossimilhança, apresentado na Figura 4.6:

Figura 4.6: Teste sequencial do logaritmo da razão de verossimilhanças da distribuição exponencial pelo pacote SPRT.



Fonte: Autora, 2019.

# Considerações Finais

Para o exemplo desenvolvido neste trabalho com teste de hipóteses convencional e sequencial sobre o parâmetro da distribuição exponencial, pode-se concluir que para a amostragem sequencial permitiu-se trabalhar com um tamanho de amostra menor quando comparada a convencional.

Além disso, pode-se observar que foi possível desenvolver a teoria de teste de hipóteses convencional e sequencial sobre o parâmetro da distribuição exponencial.

# Referências Bibliográficas

ANDRADE, D. F.; OGLIARI, P. J. **Estatística para as ciências agrárias e biológicas, com noções de experimentação**. Florianópolis: Editora da UFSC, 359p. 2013.

BARBOSA, J.C. A amostragem sequencial, In: FERNANDES, O.A.; CORREIA, A.C.B.; de BORTOLI, S.A. (ed.). **Manejo integrado de pragas e nematóides**. Jaboticabal: FUNEP, p. 205-211, 1992

BRIGHENTI, C. R. G. **Testes frequentistas condicionais e testes com interpretação bayesiana e frequentista condicional**. 212f. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária), Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2007.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. São Paulo: Editora Saraiva, 5ª Edição. 526p, 2006.

CASELLA, G.; BERGER R. L.; **Statistical Inference**. Duxbury Press, Second Edition, 2002.

DUARTE, E.T.V.; DE SOUZA, D.I.; CARVALHO, E. A. **Determinação de propriedades mecânicas em pequenos lotes**. Anais do 45º Congresso Brasileiro de Cerâmica. Florianópolis, SC. 2001

ESTEFANEL, V. e BARBIN, D. **Amostragem Sequencial baseada no teste sequencial da razão de probabilidades e seu uso na determinação da época de controle das lagartas da soja no estado do Rio Grande do Sul**. Rev. Centro Ciência Rurais, 29-48. 1979

FONSECA, D. R. **Estimador de Máxima Verossimilhança utilizado em Testes de Vida Sequenciais com Trucagem: uma aplicação com um modelo Weibull de três parâmetros**. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. UENF, Campos dos Goytacazes, RJ, 2008.

HOGG, R.V., CRAIG, A.T. **Introduction to Mathematical Statistics.** London: Macmillan. Belo Horizonte, 1978

MAGALHÃES, M.N.; LIMA, A.C.P. **Noções de Probabilidade e Estatística.** São Paulo: ED. USP, 6ª edição, 2008.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics.** 3 rd. ed. Singapore: McGraw-Hill International. 480p. 1974.

NAGELKERKE, N. J. D; HART; A. A. M. **The sequential comparison of survival curves.** Biometrika, 67, p.247-249, 1980.

R Core Team. **R: A language and environment for statistical computing.** R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Áustria, 2019.

WALD, A. **Sequential Analysis.** New York: John Willey & Sons, Inc., USA, 1947.